Ejercicios de Análisis Matemático
Números complejos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

$$\text{i)}\quad (7-2i)(5+3i) \qquad \text{ii)}\quad (i-1)^3 \qquad \text{iii)}\quad \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) \qquad \text{iv)}\quad \frac{3+i}{\overline{2+i}}$$

$$\text{v)}\quad \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} \qquad \text{vi)}\quad (1+i)^{-2} \qquad \text{vii)}\quad \frac{1+2i}{2-i} \qquad \text{viii)}\quad i^2(1+i)^3$$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a)}\ f_1(z) = \overline{z}^2 \quad \text{b)}\ f_2(z) = z^3 \quad \text{c)}\ f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d)}\ f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e)}\ f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a)}\ |(1+i)(2-i)| \quad \text{b)}\ \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c)}\ |(1+i)^{20}| \quad \text{d)}\ |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:
   a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)}\ -\sqrt{3}-i \quad \text{b)}\ -\sqrt{3}+i \quad \text{c)}\ \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d)}\ \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a + i\,b$:

$$\text{a)}\ (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c)}\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d)}\ (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

7. Prueba que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ el argumento principal viene dado por

$$\arg z = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$$

   Sugerencia. Ver el ejercicio resuelto (**??**).

8. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

9. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

10. Sea $z = x + i\,y$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

11. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

12. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}\, i\, z - 6i = 0$$

13. Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1+i$ pero no admita como raíz a $1-i$.

14. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

$$\text{a) } z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0; \qquad \text{b) } z^4 + (5+4i)z^2 + 10i = 0 = 0$$

Sugerencia. El número $1+i$ es raíz de la ecuación del apartado a).

15. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

16. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

17. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

18. Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w-1$ y $w+1$ en forma polar.

19. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcula $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

20. Calcula una fórmula para la suma

$$\sum_{k=-N}^{N} \big(\cos(2k\pi t) + i \operatorname{sen}(2k\pi t)\big)$$

(tu respuesta debería de ser un cociente de senos).

21. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\ \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Dado un número entero $m \in \mathbb{Z}$, calcula el valor de las expresiones:

a) $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$;

b) $1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$.

22. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

   a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen}\varphi - 4 \operatorname{sen}^3\varphi$.

   b) $\cos 4\varphi = 8 \cos^4\varphi - 8 \cos^2\varphi + 1$.

   c) $\operatorname{sen} 5\varphi = 5 \operatorname{sen}\varphi - 20 \operatorname{sen}^3\varphi + 16 \operatorname{sen}^5\varphi$.

23. Representa gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$|z-3| \leqslant 3; \quad 2 < |z-i| \leqslant 3; \quad |\arg z| < \pi/6; \quad |z-i| + |z+i| = 4$$
$$|z-1| = |z-2i|; \quad \left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2; \quad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \quad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1$$

24. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

25. Resuelve la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

26. Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

27. Si $0 \leqslant \arg w - \arg z < \pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z} w)$.

28. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i,\ \pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $r\, \mathrm{e}^{i\varphi}$.

29. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1 + \mathrm{e}^{i\varphi},\ 1 - \mathrm{e}^{i\varphi},\ -a\, \mathrm{e}^{i\varphi}$$

   donde $|\varphi| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

30. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ \mathrm{e}^{-3},\ \mathrm{e}^{5i},\ 4,\ -5\,\mathrm{e},\ 1+i$$

31. Calcula $\log(3i) + \log(-1 + i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1 + i\sqrt{3})\big)$.

32. Calcula $\log(-1-i) - \log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

33. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^{\,i}],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

34. Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log(\mathrm{e}^z) = z\ ;\ b)\ \exp(\log(z)) = z\ ;\ c)\ \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}\ ;\ d)\ \log(z^n) = n\log(z).$$

35. Prueba que la función logaritmo principal establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

36. Estudia condiciones para que $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

37. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\text{a) } \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w), \qquad \text{b) } \operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$$

38. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a)}\ \operatorname{Log}[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{b)}\ \log[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{c)}\ \log(a^b) = b\log a$$

39. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

40. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$